SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂK NÔNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NGUYỄN CHÍ THANH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC 23/3 CẤP TỈNH
LẦN THỨ VI NĂM 2019
MÔN THI: TOÁN 10
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 06 câu trong 01 trang)

Câu 1 (4 điểm): Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+2x-4y=0 \\ x^2+y^2-xy+2y-5=0 \end{cases}$

Câu 2 (4 điểm): Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). AD, BE, CF là ba đường cao $(D\in BC, E\in CA, F\in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt đường tròn (O) tại điểm M.

a) Chứng minh $AO\perp EF$.

b) Gọi N là trung điểm cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng M, N, H thẳng hàng.

Câu 3 (3 điểm): Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2}$$

Câu 4 (3 điểm): Cho ba hình vuông $(T_1),(T_2),(T_3)$ có độ dài ba cạnh tương ứng là ba số nguyên $x, x+4, x+8$. Hỏi tổng diện tích của ba hình vuông đó bằng 2019 đơn vị diện tích có được không?

Câu 5 (3 điểm): Có bao nhiêu cách sắp xếp các số $31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$ thành một dãy sao cho tổng của bốn số liên tiếp bất kỳ trong dãy luôn chia cho 3 dư 1?

Câu 6 (3 điểm): Cho hàm số $f:N^*\to N^*$ thỏa mãn: $\begin{cases} 2f(n)=f(n+1)+f(n-1),\ \forall n\geq 2 \\ f(2f(n))=2n, \forall n\geq 1 \end{cases}$

Tính $f(2019)$.

--------------------- *Hết* --------------------

Họ và tên thí sinh:.................................... Số báo danh:..

Chữ ký CBCT 1:....................................... Chữ ký CBCT 2:...….

ĐÁP ÁN

Đề câu 1 (4,0 điểm)**:**

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+2x-4y=0 \\ x^2+y^2-xy+2y-5=0 \end{cases}$

Đáp án câu 1:

CÂU 1	ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
	Ta có: $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+2\text{x}-4y=0 & (1) \\ x^2+y^2-xy+2y-5=0 & (2) \end{cases}$ (I) Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-y+2)(x-2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=2y \end{array}\right.$	2.0
	Với $x=y-2$ thay vào (2) ta được $y^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$ Với $y=1 \Rightarrow x=-1$ Với $y=-1 \Rightarrow x=-3$	1.0
	Với $x=2y$ thay vào (2) ta được $3y^2+2y-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$ Với $y=-1 \Rightarrow x=-2$ Với $y=-\frac{5}{3} \Rightarrow x=-\frac{10}{3}$ Vậy (I) có nghiệm (x;y) là: $(-1;1)$, $(-3;-1)$, $(2;1)$, $\left(-\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$.	1.0

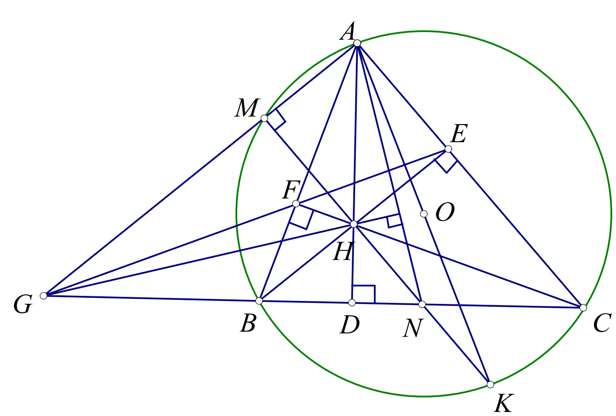
Câu 2 (4 điểm) : Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). AD, BE, CF là ba đường cao $\left(D \in BC, E \in CA, F \in AB\right)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt đường tròn (O) tại điểm M.

a) Chứng minh $AO \perp EF$

b) Gọi N là trung điểm cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng M, N, H thẳng hàng

Đáp án câu 2:

Ý	Nội dung	Điểm
a)	Ta có $2\widehat{OAC} = 180^0 - \widehat{AOC}$	0.5
	$\Rightarrow \widehat{OAC} = 90^0 - \dfrac{\widehat{AOC}}{2} = 90^0 - \widehat{ABC}$	0.5
	Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$	0.5
	$\Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{AEF} = 90^0 \Rightarrow AO \perp EF$	0.5
b)	Gọi N là trung điểm cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $GH \perp AN$.	
	Theo kết quả câu a) và tứ giác AEHF nội tiếp suy ra M nằm trên đường tròn đường kính AH, do đó $HM \perp MA$.	**0.5**
	Tia MH cắt lại đường tròn (O) tại K, do $\angle AMK = 90^\circ$ nên AK là đường kính của (O).	**0.5**
	Từ đó suy ra $KC \perp CA, KB \perp BA$. Suy ra $KC \parallel BH, KB \parallel CH$, do đó $BHCK$ là hình bình hành. Suy ra KH đi qua N	**0.5**
	Khi đó M, H, N thẳng hàng.	**0.5**



Bài 3 (3.0 điểm**).**

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2} (*)$$

Đáp án

	Ta có $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c}$	0,5
	Tương tự: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{b+2c+a}$, $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{c+2a+b}$	0,5
	Từ đó ta cần chứng minh	0,5
	$(\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}) \geq \frac{9}{4} (**)$	
	Thật vậy, ta có $\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$	0,5
	Suy ra $(\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}) \geq \frac{9}{4}$	0,5
	Do đó (**) đúng. Vậy (*) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$	0,5

Bài 5: (3,0 điểm) Cho ba hình vuông $(T_1), (T_2), (T_3)$ có độ dài ba cạnh tương ứng là ba số nguyên $x, x+4, x+8$. Hỏi tổng diện tích của ba hình lập vuông đó bằng 2019 đơn vị diện tích có được không?

Đáp án bài 5

Câu 5	**NỘI DUNG**	**ĐIỂM**
	Ta có các số này $x, x+4, x+8$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo 3, tức là có đúng một số chia 3 dư $0,1,2$	0,5
	Như vậy tổng ba số $x^2, (x+4)^2, (x+8)^2$ khi chia 3 dư 2	1,5
	Mà 2019 khi chia cho 3 có số dư là 0 nên tổng diện tích của ba hình vuông đó không thể bằng 2019 đơn vị diện tích.	1,0

Đề câu 5:

Có bao nhiêu cách sắp xếp các số 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 thành một dãy sao cho tổng của bốn số liên tiếp bất kỳ trong dãy luôn chia cho 3 dư 1?

Đáp án câu 5:

Ý	Nội dung	Điểm
	Vì $31 \equiv 1 (\bmod 3), 41 \equiv 2 (\bmod 3), 51 \equiv 0 (\bmod 3), 61 \equiv 1 (\bmod 3),$ $71 \equiv 2 (\bmod 3), 81 \equiv 0 (\bmod 3), 91 \equiv 1 (\bmod 3),$	0,5
	Nên ta có thể viết lại các số: 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 bởi các số $1, 2, 0, 1, 2, 0, 1$. Giả sử $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ là một sự sắp xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,5
	Ta thấy $2 \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) (\bmod 3)$	0,25
	$\equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + a_4 \equiv a_4 + 1 (\bmod 3)$	0,25
	Vì $a_4 \equiv 1 (\bmod 3)$ nên a_1, a_2, a_3 là sự sắp xếp của các số $0, 1, 2$	0,25
	Vì $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 1 (\bmod 3)$	0,5
	Nên $a_1 \equiv a_5 (mod 3)$	0,25
	Tương tự, ta cũng chứng minh được thứ tự của các số a_1, a_2, a_3 cũng được xác định duy nhất bởi các số a_5, a_6, a_7	0,25
	Vầy có: $3.2^3.3! = 144$ sự sắp xếp.	0,25

Đề Câu 6:_ (3,0 điểm)

Cho hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn: $\begin{cases} 2f(n) = f(n+1) + f(n-1) \quad (1) \\ f(2f(\text{n})) = 2n \quad (2) \end{cases}$. Tính $f(2019)$?

Đáp án câu 6:

CÂU	**NỘI DUNG**	**ĐIỂM**
6	Từ (2) ta có : $2f(\text{n}) = f(n+1) + f(n-1)$ $\Rightarrow f(n+1) - f(\text{n}) = f(\text{n}) - f(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (3)	0,5
	Từ (3) suy ra $f(\text{n}) - f(n-1) = ... = f(2) - f(1) = c$ Do đó : $f(\text{n}) = f(n-1) + c$ $f(\text{n}-1) = f(n-2) + c$ .... $f(2) = f(1) + c$ $\Rightarrow f(\text{n}) = (n-1)c + f(1)$	0,5
	$f(2f(\text{n})) = 2n \Rightarrow 2nc^2 - 2c^2 + (2f(1)-1)\text{c} + f(1) = 2n$ Thay vào (2) : $\Rightarrow \begin{cases} c^2 = 1 \\ -2c^2 + (2f(1)-1)\text{c} + f(1) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ Do đó $f(n) = n, \forall n \in N^*$ Vậy $f(2019) = 2019$	0,5