SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂK NÔNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NGUYỄN CHÍ THANH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC 23/3 CẤP TỈNH
LẦN THỨ VI NĂM 2019
MÔN THI: TOÁN 11
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 06 câu trong 01 trang)

Câu 1: ***(4 điểm)*** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(4y-1)\sqrt{x^2+1}-2y=2x^2+1\\ x^2y+y^2=1\end{cases}$$

Câu 2: ***(4 điểm)*** Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=3u_n+2\end{cases}, n\ge 1.$

a/ Tính u_{2019}.

b/ Cho $S_n=\dfrac{1}{u_1+1}+\dfrac{1}{u_2+1}+....+\dfrac{1}{u_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

Câu 3: ***(3 điểm)*** Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Tiếp tuyến tại A của (O_2) cắt (O_1) tại C, tiếp tuyến tại A của (O_1) cắt (O_2) tại D. CD cắt (O_1) tại M và cắt (O_2) tại N. (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN.

a. Chứng minh rằng: $\widehat{AMB}=\widehat{BNM}$.

b. Gọi Q là giao điểm của đường tròn (I) và AB, E là giao điểm của QM và AC, F là giao điểm của QN và AD. Chứng minh rằng tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

Câu 4: ***(3 điểm)*** Tìm tất cả các hàm số $f: R^* \to R$ thoả mãn:

$$y.f(x)-x.f(y)=(x^2-y^2)xy, \quad \forall x,y\in R^*$$

Câu 5: ***(3 điểm)*** Cho dãy số nguyên (x_n) xác định bởi: $x_0=0, x_1=1$ và $x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n$ với mọi số tự nhiên *n*.

a) Chứng minh rằng x_{2019} chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng $x_{n+130}\equiv x_n \pmod{131}$ với mọi số tự nhiên n.

Câu 6: ***(3 điểm)*** Xét tất cả các dãy $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2019}$ gồm 2019 số nguyên dương tùy ý, không nhất thiết phân biệt. Gọi m là số các bộ (a,b,c) với $a<b<c$ sao cho x_a,x_b,x_c là 3 số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai không chia hết cho 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của *m*.

-------------------- *Hết* --------------------

Họ và tên thí sinh:.................................... Số báo danh:..

Chữ ký CBCT 1:....................................... Chữ ký CBCT 2:..

Bài 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4y-1)\sqrt{x^2+1}-2y=2x^2+1 \\ x^2y+y^2=1 \end{cases}$$

Đáp án bài 1

Bài 1	**ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM**	**ĐIỂM**
	$\begin{cases} (4y-1)\sqrt{x^2+1}-2y=2x^2+1 \ (1) \\ x^2y+y^2=1 \qquad (2) \end{cases} (I)$. Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\ge 1\Rightarrow$ phương trình (1) có dạng $2t^2-(4y-1)t+2y-1=0$	1.0
	$\Delta=(4y-1)^2-8(2y-1)=(4y-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2y-1 \\ t=\dfrac{1}{2} (l) \end{array}\right.$	1.0
	Với $t=2y-1\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y-1 \\ y\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x^2=4y^2-4y \end{cases}$ thay vào (2)	1.0
	$4y^2(y-1)+y^2-1=0 \Leftrightarrow y=1$ (do $y\ge 1)\Rightarrow x=0$ Vậy, hệ (*I*) có nghiệm $(0;1)$.	1.0

Câu 2: ***(4 điểm)*** Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$, $n \geq 1$.

a/ Tính u_{2019}

b/ Cho $S_n = \dfrac{1}{u_1+1} + \dfrac{1}{u_2+1} + ... + \dfrac{1}{u_n+1}$. Tính $\lim S_n$

Đáp án câu hỏi 2:

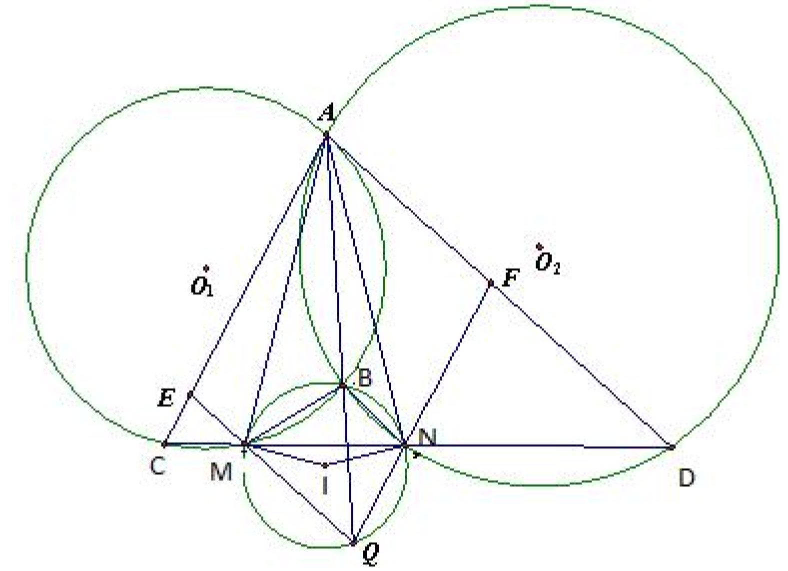
Câu	ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
2a	Đặt $v_n = u_n + 1 \Rightarrow v_1 = 2$ $v_{n+1} - 1 = 3(v_n - 1) + 2$	1,0
	$\Leftrightarrow v_{n+1} = 3v_n \Rightarrow v_n = 3^{n-1}.v_1 = 2.3^{n-1}$	0,5
	$\Rightarrow u_n = 2.3^{n-1} - 1 \Rightarrow u_{2019} = 2.3^{2018} - 1$	0,5
2b	$S_n = \left[\dfrac{1}{2.3^0} + \dfrac{1}{2.3^1} + ... + \dfrac{1}{2.3^{n-1}}\right]$	0,5
	$S_n = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{1}{3} + ... + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$	1,0
	$\Rightarrow \lim S_n = \dfrac{1}{2}.1.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$	0,5

Câu 3 (3,0 điểm). Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A,B. Tiếp tuyến tại A của (O_2) cắt (O_1) ại C, tiếp tuyến tại A của (O_1) cắt (O_2) tại D. CD cắt (O_1) tại M và cắt (O_2) tại N. (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN.

a. Chứng minh rằng: $\widehat{AMB} = \widehat{BNM}$.

b. Gọi Q là giao điểm của (I) và AB; E là giao điểm của QM và AC; F là giao điểm của QN và AD. Chứng minh rằng tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

Đáp án câu hỏi 3

CÂU	ĐÁP ÁN - HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
Câu 3 (3 điểm)		
	Tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$. AD là tiếp tuyến của (O_1) nên $\widehat{ACB} = \widehat{BAD}$. Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{BAD}$ (1).	0.5
	- Tứ giác $ABND$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{BNM}$ (2). Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{BNM}$	0.5
b	Ta có $\widehat{NMQ} = \widehat{NBQ}$ và $\widehat{NBQ} = \widehat{ADN}$ nên $\widehat{NMQ} = \widehat{ADN} \Rightarrow QM // AD$ Do đó $\widehat{DFN} = \widehat{MQN}$ (*)	0.5
	Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{BNM} \Rightarrow AM$ là tiếp tuyến của (I), tương tự AN là tiếp tuyến của (I). suy ra tứ giác $ANIM$ nội tiếp. (1)	0.5
	AM là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{MQN} = \widehat{AMN}$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{DFN} \Rightarrow$ tứ giác $AMNF$ nội tiếp (2)	0.5
	Tương tự tứ giác $ANME$ nội tiếp (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác $AEIF$ nội tiếp	0.5

Câu 4: ***(3 điểm)*** Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn

$$y.f(x) - x.f(y) = (x^2 - y^2).xy, \quad \forall x, y \in R$$

Đáp án câu hỏi 4:

Câu	Đáp án	Thang điểm
4	Ta có $\frac{y.f(x) - x.f(y)}{xy} = \frac{(x^2 - y^2).xy}{xy} = x^2 - y^2$	
	$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} = x^2 - y^2$	0,5
	$\frac{f(x)}{x} - x^2 = \frac{f(y)}{y} - y^2, \quad (*)$	0,5
	Xét hàm $g(t) = \frac{f(t)}{t} - t^2$ Từ $(*)$, ta có $g(x) = g(y), \quad \forall x, y \neq 0 \Rightarrow g(t) = a$ Với a là hằng số	0,5
	$\frac{f(t)}{t} - t^2 = a \Leftrightarrow f(t) = at + t^2$	0,5
	Vậy $f(x) = ax + x^2, \forall x \in R^*$, Với a là hằng số	0,5

Câu 5: ***(3 điểm)*** Cho dãy số nguyên (x_n) xác định bởi: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ và $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ với mọi số tự nhiên n .

a) Chứng minh rằng x_{2019} chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng $x_{n+130} \equiv x_n \pmod{131}$ với mọi số tự nhiên n

Đáp án bài 5:

Bài 5	**ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM**	**ĐIỂM**
a)	Ta có $x_n \equiv x_{n+3} \pmod 4$. Suy ra $x_{2019} \equiv x_0 \pmod 4$, do đó x_{2019} chia hết cho 4.	1,0
b)	Ta có $$x_n = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$ Khai triển Newton cho ta: $2^n x_n = \sum_{\substack{k=\overline{0,n} \\ 2\nmid k}} C_n^k 3^{n-k} 5^{\frac{k-1}{2}}$.	0,5
	Ta có $23^2 \equiv 5 \pmod{131}$. Suy ra $$2^n x_n \equiv \sum_{\substack{k=\overline{0,n} \\ 2\nmid k}} C_n^k 3^{n-k} 23^{k-1} = \frac{(3+23)^n - (3-23)^n}{23} \equiv \frac{26^n - (-20)^n}{23} \pmod{131} .$$ Hay $x_n \equiv \dfrac{13^n - (10)^n}{23} \pmod{131}$.	1,0
	Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta được: $x_{130} \equiv 0 \pmod{131}$ và $x_{131} \equiv 1 \pmod{131}$. Do công thức truy hồi, suy ra $x_{n+130} \equiv x_n \pmod{131}$ với mọi số tự nhiên n .	0,5

<u>Câu 6</u>: *(3 điểm)* Xét tất cả các dãy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2019}$ gồm 2019 số nguyên dương tùy ý, không nhất thiết phân biệt. Gọi m là số các bộ (a,b,c) với $a<b<c$ sao cho x_a, x_b, x_c là 3 số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai không chia hết cho 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của *m*.

<u>Đáp án câu 6:</u>

Câu	Đáp án – Hướng dẫn chấm	Điểm
6	Gọi k là công sai của cấp số cộng trong đề bài thì rõ ràng $(k,3)=1$. Vì thế nên ta có thể viết $x_b = x_a + k, x_c = x_a + 2k$ Suy ra các số này lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo 3, tức là có đúng một số chia 3 dư $0,1,2$	**1.0**
	Gọi A,B,C lần lượt là số lượng số của dãy chia 3 dư $0,1,2$ thì $A+B+C=2019$	**0.5**
	Khi đó, số bộ 3 số thỏa mãn đề bài sẽ không vượt quá $m \le ABC \le \left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)^3 = 673^3$.	**0.5**
	Để xây dựng dãy số thỏa mãn, ta chỉ cần xét $a_1 \to a_{673}$ bằng 1, $a_{674} \to a_{1346}$ bằng 2, $a_{1347} \to a_{2019}$ bằng 3 Dễ thấy trong dãy này, giá trị của $m = 673^3$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là 673^3.	**1.0**